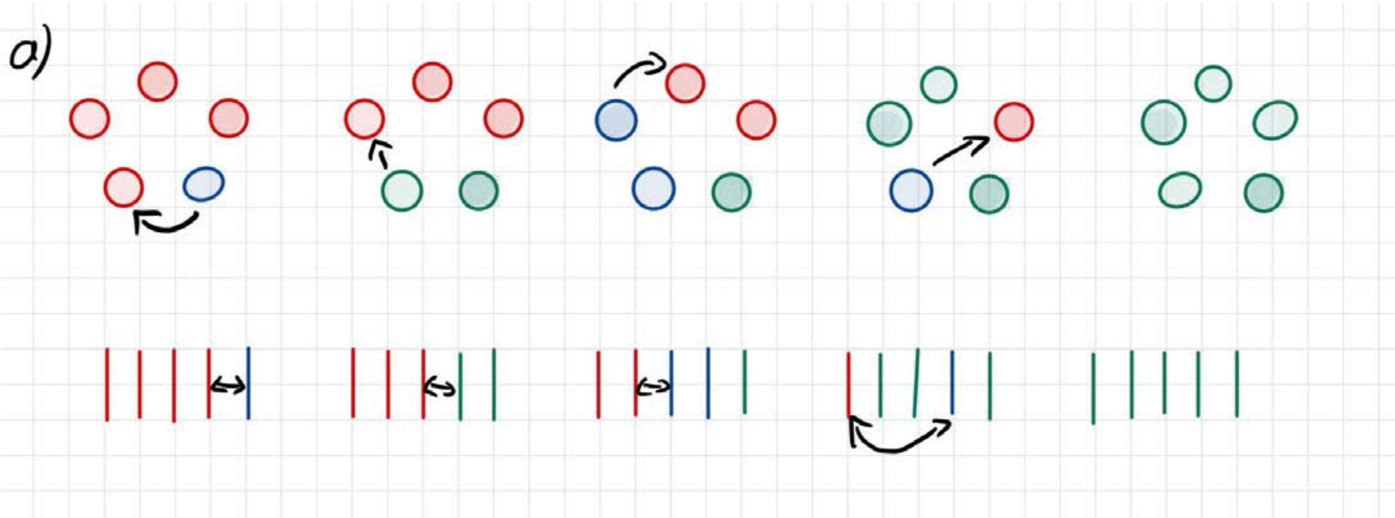
Mathe-Treff OTW 2023

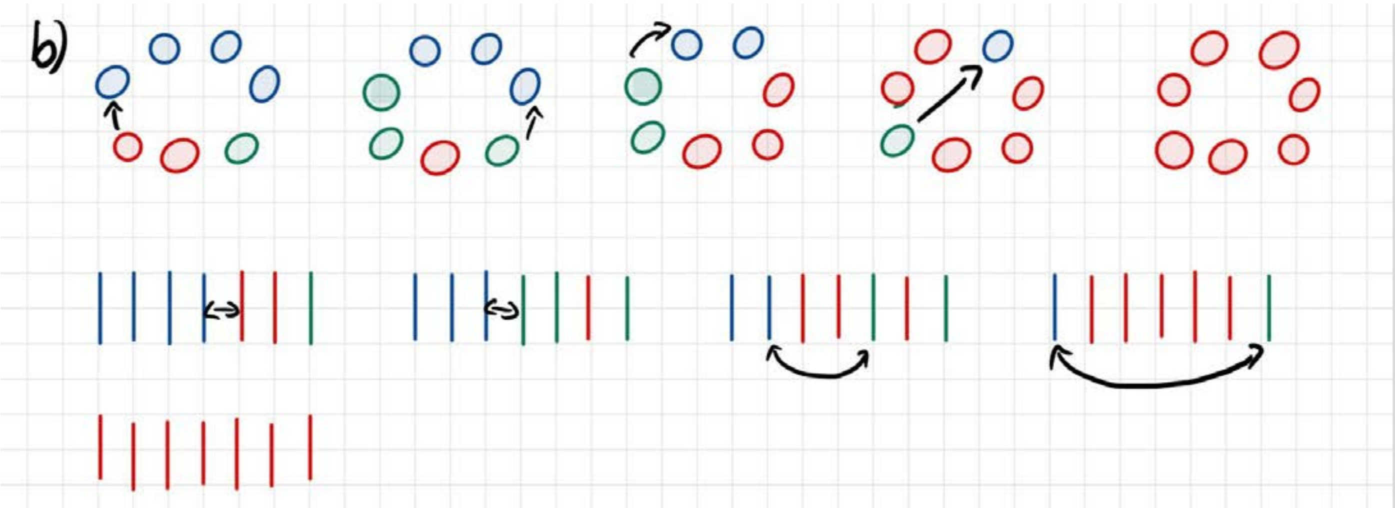
Lösungen für die Klassenstufe 9/10 (Sekundarstufe I)

AUFGABE 1 (Roboterbattle)



Um auf eine solche Lösung zu kommen, kann man beispielsweise mit Farbplättchen oder Spielfiguren oder auch in einem Begegnungsspiel ausprobieren, wie die Roboter ihre Farbe wechseln können.

Entsprechend:



Will man das kürzer aufschreiben, dann verwenden wir eine Schreibweise, in der wir die Anzahlen der jeweiligen Roboter auf dem Spielfeld in den entsprechenden Farben in Klammern angeben (blau / rot / grün).
Also bedeutet (1 / 2 / 3) ein blauer, zwei rote und drei grüne Roboter.

Dann ergeben sich für diese beiden Teilaufgaben die folgenden Notationen:

a)

$(1/4/0) \Rightarrow (0/3/2) \Rightarrow (2/2/1) \Rightarrow (1/1/3) \Rightarrow (0/0/5)$

b)

$(4/2/1) \Rightarrow (3/1/3) \Rightarrow (2/3/2) \Rightarrow (1/5/1) \Rightarrow (0/7/0)$

c) und d)

Bis auf unterschiedliche Reihenfolgen der Farben (Permutationen) sind bei 8 Robotern folgende Verteilungen möglich:

(1)$(1/1/6) \Rightarrow (0/0/8)$

(2)$(1/2/5) \Rightarrow (0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(3)$(1/3/4) \Rightarrow (3/2/3) \Rightarrow (2/4/2) \Rightarrow (1/6/1) \Rightarrow (0/8/0)$

(4)$(2/2/4) \Rightarrow (1/1/6) \Rightarrow (0/0/8)$

(5)$(2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(6)$(0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(7)$(8/0/0)$

(8)$(0/1/7) \Rightarrow (2/0/6) \Rightarrow (1/2/5) \Rightarrow (0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

e)

Wir betrachten die Anzahlen a, b und c der blauen, roten und grünen Roboter. Genauer gesagt betrachten wir die Differenzen dieser Zahlen. Zum Beispiel beschreibt die Differenz $a - b$ um wie viel sich die Anzahlen der blauen und roten Roboter unterscheiden.

Die entscheidende Beobachtung ist, dass jede Differenz durch die Begegnung von zwei Robotern entweder gleich bleibt oder sich so ändert, dass sie um genau 3 größer oder um 3 kleiner wird.

Dazu nehmen wir beispielsweise an, dass sich ein blauer und ein roter Roboter begegnen. Bei dem Farbwechsel wird die Anzahl der blauen und roten Roboter um 1 erniedrigt und die der grünen Roboter um 2 erhöht:

$a^* = a - 1$

$b^* = b - 1$

$c^* = c + 2$

Für die Differenzen nach der Begegnung eines blauen und eines roten Roboters gilt somit:

$a^* - b^* = (a - 1) - (b - 1) = a - b$

$a^* - c^* = (a - 1) + (c + 2) = a - c - 3$

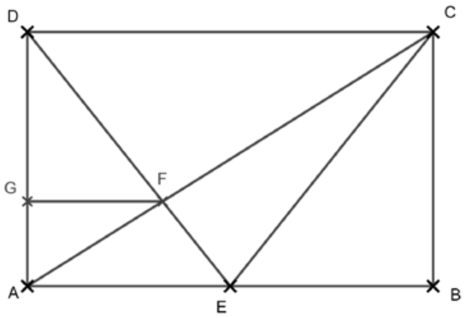
$b^* - c^* = (b - 1) + (c + 2)= b - c - 3$

Aus den Aufgaben a) bis c) geht hervor, dass ein Zustand erreicht werden muss, bei dem die Differenz zweier Farben Null ist. Die obigen drei Gleichungen zeigen, dass die Differenz zweier Farben nur Null werden kann, wenn sie zu Beginn bereits Null oder ein Vielfaches von 3 ist.

Hiermit lässt sich die folgende Bedingung ableiten und beweisen:

Bei a blauen, b roten und c grünen Robotern ist genau dann ein Ende möglich, wenn eine der Differenzen $a - b$, $a - c$, $b - c$ Null oder ein Vielfaches von 3 ist. Ist keine der Differenzen $a - b$, $a - c$, $b - c$ Null oder ein Vielfaches von 3, so ist kein Ende möglich.

AUFGABE 2 (Moderne Kunst)



Wir bezeichnen die Eckpunkte des Rechtecks mit A, B, C und D. Der Mittelpunkt der unteren roten Linie heißt E und der Schnittpunkt der grünen Linie mit der Verbindung zwischen D und E heißt F.

Dann bilden die Verbindungen zwischen A und E, zwischen D und C sowie zwischen D und F und zwischen F und E eine Strahlensatzfigur. Es gilt: DC : AE = DF : FE.

Da E aber die Mitte der unteren Linie ist, die genauso lang ist wie die Verbindung zwischen D und C, muss DC : AE gleich 2 sein. Daher gilt: DF : FE = 2.

Vom Punkt F aus kann man das Lot auf die Verbindung zwischen A und D fällen. Das Lot erreicht die Verbindung zwischen A und D im Punkt G. Die Verbindungen zwischen D und F und zwischen F und E sowie die zwischen D und G und zwischen G und A bilden wieder eine Strahlensatzfigur. Es gilt: DF : FE = DG : GA

Nach den Überlegungen oben folgt daraus aber, dass DG : GA = 2 gilt. Die Strecke zwischen D und G ist also doppelt so lang wie die zwischen G und A. Oder anders formuliert: Die Strecke von G nach A entspricht einem Drittel der Strecke zwischen A und D.

Jetzt betrachten wir das gelbe Dreieck. Es handelt sich um das Dreieck FEC. Seinen Flächeninhalt erhält man, wenn man vom großen Dreieck ABC die Flächeninhalte der Dreiecke AEF und EBC abzieht. Diese Flächeninhalte kann man bestimmen:

Dreieck ABC: Der Flächeninhalt ergibt sich durch die Rechnung 0,5 mal AB mal BC.

Dreieck EBC: Der Flächeninhalt ergibt sich durch die Rechnung 0,5 mal EB mal BC. EB ist aber die Hälfte von AB. Also ergibt sich als Flächeninhalt 0,5 mal 0,5 mal AB mal BC. Das vereinfacht sich zu 0,25 mal AB mal BC.

Dreieck AEF: Der Flächeninhalt ergibt sich durch die Rechnung 0,5 mal AG mal AE. AG ist aber (siehe oben) gleich 1/3 mal AD bzw. 1/3 mal BC. Und AE ist weiterhin gleich der Hälfte von AB. Also ergibt sich als Flächeninhalt wiederum 0,5 mal 0,5 mal AB mal 1/3 mal BC. Das vereinfacht sich zu 1/12 mal AB mal BC

Insgesamt ergibt sich der Flächeninhalt also als 0,5 mal AB mal BC – 0,25 mal AB mal BC – 1/12 mal AB mal BC. Das Ergebnis ist 1/6 mal AB mal BC.

Und damit ist Maries Behauptung bewiesen.

AUFGABE 3 (Summe von Quadratzahlen)

a) Systematisch aufgeschrieben sind alle 37 Möglichkeiten für $z < 100$:

$2 = 1^2 + 1^2$			
$5 = 1^2 + 2^2$	$26 = 5^2 + 1^2$	$61 = 6^2 + 5^2$	$65 = 8^2 + 1^2$
$8 = 2^2 + 2^2$	$29 = 5^2 + 2^2$	$72 = 6^2 + 6^2$	$68 = 8^2 + 2^2$
$10 = 1^2 + 3^2$	$34 = 5^2 + 3^2$	$50 = 7^2 + 1^2$	$73 = 8^2 + 3^2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$41 = 5^2 + 4^2$	$53 = 7^2 + 2^2$	$80 = 8^2 + 4^2$
$18 = 3^2 + 3^2$	$50 = 5^2 + 5^2$	$58 = 7^2 + 3^2$	$89 = 8^2 + 5^2$
$17 = 4^2 + 1^2$	$37 = 6^2 + 1^2$	$65 = 7^2 + 4^2$	$82 = 9^2 + 1^2$
$20 = 4^2 + 2^2$	$40 = 6^2 + 2^2$	$74 = 7^2 + 5^2$	$85 = 9^2 + 2^2$
$25 = 4^2 + 3^2$	$45 = 6^2 + 3^2$	$91 = 7^2 + 6^2$	$90 = 9^2 + 3^2$
$32 = 4^2 + 4^2$	$52 = 6^2 + 4^2$	$98 = 7^2 + 7^2$	$97 = 9^2 + 4^2$

Vielfache von 3 sind dabei nur: $18 = 3^2 + 3^2; 45 = 6^2 + 3^2; 72 = 6^2 + 6^2; 90 = 9^2 + 3^2$.

b) Betrachtet man die in Frage kommenden Zahlen $18 = 3^2 + 3^2; 45 = 6^2 + 3^2; 72 = 6^2 + 6^2; 90 = 9^2 + 3^2$, so erkennt man, dass die Zahlen a und b jeweils Vielfache von 3 sind.

Behauptung:

Für die Gleichung $z = a^2 + b^2$ gilt:

z ist ein Vielfaches von 3 ⇔ a und b Vielfache von 3.

⇐:

Es seien a und b Vielfache von 3. Dann sind auch a^2 und b^2 Vielfache von 3. Es existieren also $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ mit $a^2 = 3 \cdot a_1$ und $b^2 = 3 \cdot b_1$. Dann ist $z = a^2 + b^2 = 3 \cdot a_1 + 3 \cdot b_1 = 3 \cdot (a_1 + b_1)$ und somit ist z ein Vielfaches von 3.

⇒:

Es sei z ein Vielfaches von 3. Angenommen a oder b sind kein Vielfaches von 3.

O.b.d.A. sei a kein Vielfaches von 3, dann ist 3 kein Primfaktor von a und somit auch nicht von a^2.

1. Fall: a und b haben keinen gemeinsamen Primfaktor.

In diesem Fall sind a und b teilerfremd. Somit ist $z = 1 \cdot (a^2 + b^2)$ und z ist eine Primzahl. Die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist 3, die sich aber nicht als Summe von zwei Quadraten schreiben lässt.

2. Fall: a und b haben einen gemeinsamen Primfaktor

Es sei n der gemeinsame Primfaktor von a und b. Da a kein Vielfaches von 3 ist, gilt $n \neq 3$. Dann ist $z = n \cdot (a_1 + b_1)$ für geeignete Zahlen a_1, b_1 und z ist kein Vielfaches von 3.

Bezirksregierung
Düsseldorf

AUFGABE 4 (Wilde Würfelei)

Hier sind individuelle, kreative und und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht. Gute Lösungen werden im nächsten Schuljahr von uns veröffentlicht.

Ein Beispiel:

Kevin legt 10 Standardwürfel aufeinander. Auf dem obersten Würfel ist von oben eine 4 zu sehen. Wie hoch ist die Summe der Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind.

Welche Summe ergibt sich, wenn 21 Würfel aufeinander gestapelt werden und oben eine 1 liegt?

Wie lässt sich allgemein die Augensumme der nicht sichtbaren Flächen der Würfelsäule bilden, wenn die oberste Fläche eine Zahl zwischen 1 und 6 zeigt und die Säule aus n Würfeln bestehen?

Mit der Lösung:

9 Würfel haben 2 gegenüberliegende verdeckte Flächen und gegenüber der oben liegenden 4 ist eine 3 nicht sichtbar: 9 *7 + 3 = 66, d. h. die Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind, ist 66.

Entsprechend: 20 * 7 + 6 = 146, d. h. die Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind, ist 146.

Allgemein gilt: n: Anzahl der Würfel,

x: oben sichtbare Zahl: Damit ergibt sich (n-1) *7 + 7-x.