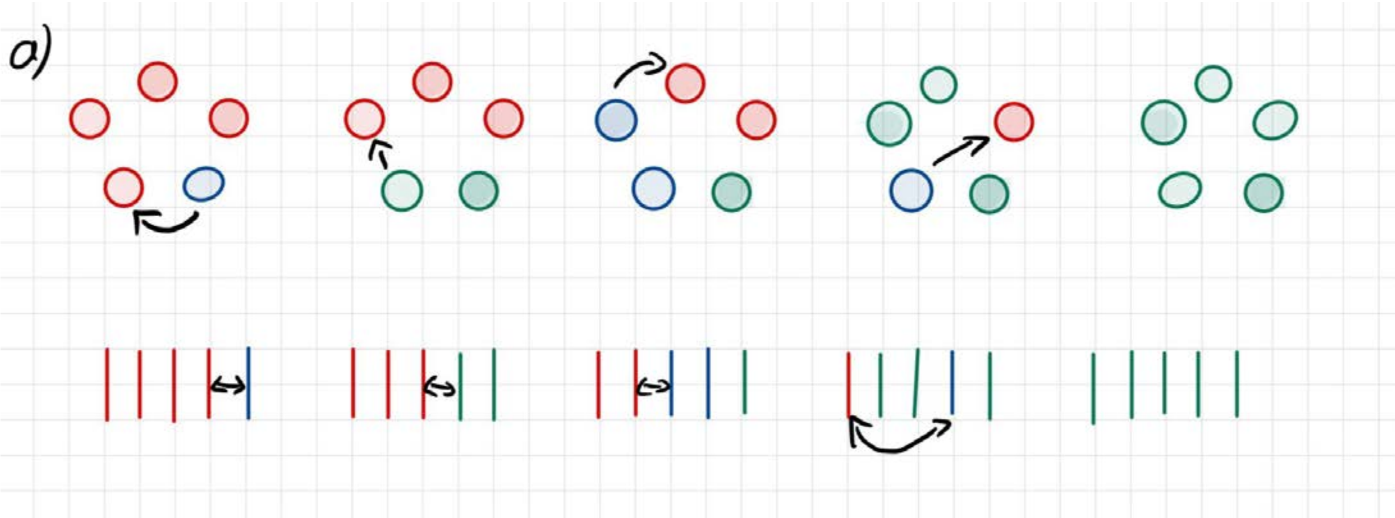
Mathe-Treff OTW 2023

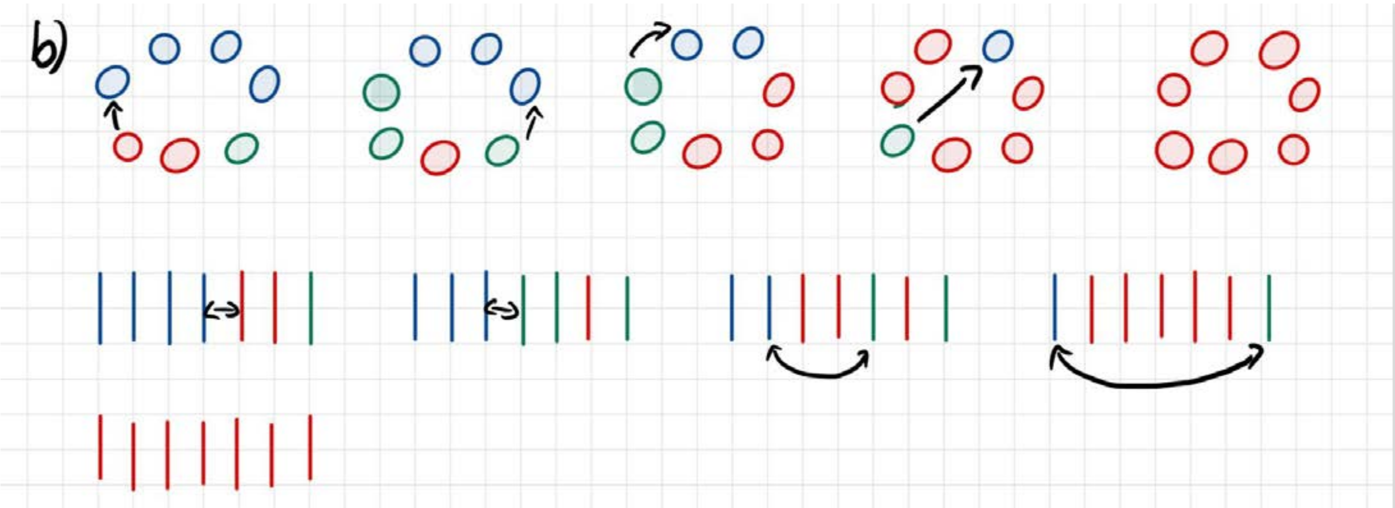
Lösungen für die gymnasiale Oberstufe (EF/Q1/Q2)

AUFGABE 1 (Roboterbattle)



Um auf eine solche Lösung zu kommen, kann man beispielsweise mit Farbplättchen oder Spielfiguren oder auch in einem Begegnungsspiel ausprobieren, wie die Roboter ihre Farbe wechseln können.

Entsprechend:



Will man das kürzer aufschreiben, dann verwenden wir eine Schreibweise, in der wir die Anzahlen der jeweiligen Roboter auf dem Spielfeld in den entsprechenden Farben in Klammern angeben (blau / rot / grün).
Also bedeutet (1 / 2 / 3) ein blauer, zwei rote und drei grüne Roboter.

Dann ergeben sich für diese beiden Teilaufgaben die folgenden Notationen:

a)

$(1/4/0) \Rightarrow (0/3/2) \Rightarrow (2/2/1) \Rightarrow (1/1/3) \Rightarrow (0/0/5)$

b)

$(4/2/1) \Rightarrow (3/1/3) \Rightarrow (2/3/2) \Rightarrow (1/5/1) \Rightarrow (0/7/0)$

c) und d)

Bis auf unterschiedliche Reihenfolgen der Farben (Permutationen) sind bei 8 Robotern folgende Verteilungen möglich:

(1)$(1/1/6) \Rightarrow (0/0/8)$

(2)$(1/2/5) \Rightarrow (0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(3)$(1/3/4) \Rightarrow (3/2/3) \Rightarrow (2/4/2) \Rightarrow (1/6/1) \Rightarrow (0/8/0)$

(4)$(2/2/4) \Rightarrow (1/1/6) \Rightarrow (0/0/8)$

(5)$(2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(6)$(0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

(7)$(8/0/0)$

(8)$(0/1/7) \Rightarrow (2/0/6) \Rightarrow (1/2/5) \Rightarrow (0/4/4) \Rightarrow (2/3/3) \Rightarrow (4/2/2) \Rightarrow (6/1/1) \Rightarrow (8/0/0)$

e)

Wir betrachten die Anzahlen a, b und c der blauen, roten und grünen Roboter. Genauer gesagt betrachten wir die Differenzen dieser Zahlen. Zum Beispiel beschreibt die Differenz $a - b$ um wie viel sich die Anzahlen der blauen und roten Roboter unterscheiden.

Die entscheidende Beobachtung ist, dass jede Differenz durch die Begegnung von zwei Robotern entweder gleich bleibt oder sich so ändert, dass sie um genau 3 größer oder um 3 kleiner wird.

Dazu nehmen wir beispielsweise an, dass sich ein blauer und ein roter Roboter begegnen. Bei dem Farbwechsel wird die Anzahl der blauen und roten Roboter um 1 erniedrigt und die der grünen Roboter um 2 erhöht:

$a^* = a - 1$

$b^* = b - 1$

$c^* = c + 2$

Für die Differenzen nach der Begegnung eines blauen und eines roten Roboters gilt somit:

$a^* - b^* = (a - 1) - (b - 1) = a - b$

$a^* - c^* = (a - 1) + (c + 2) = a - c - 3$

$b^* - c^* = (b - 1) + (c + 2)= b - c - 3$

Aus den Aufgaben a) bis c) geht hervor, dass ein Zustand erreicht werden muss, bei dem die Differenz zweier Farben Null ist. Die obigen drei Gleichungen zeigen, dass die Differenz zweier Farben nur Null werden kann, wenn sie zu Beginn bereits Null oder ein Vielfaches von 3 ist.

Hiermit lässt sich die folgende Bedingung ableiten und beweisen:

Bei a blauen, b roten und c grünen Robotern ist genau dann ein Ende möglich, wenn eine der Differenzen $a - b$, $a - c$, $b - c$ Null oder ein Vielfaches von 3 ist. Ist keine der Differenzen $a - b$, $a - c$, $b - c$ Null oder ein Vielfaches von 3, so ist kein Ende möglich.

f)

Wir betrachten wieder die Anzahlen a, b und c der blauen, roten und grünen Roboter. Genauer gesagt betrachten wir die Differenzen dieser Zahlen. Zum Beispiel beschreibt die Differenz $a - b$ um wie viel sich die Anzahlen der blauen und roten Roboter unterscheiden.

Behauptung:

Ist eine der Differenzen $a - b$, $a - c$, $b - c$ Null oder ein Vielfaches von 3, so gibt die höhere der beiden Zahlen dieser Differenz an, nach wie vielen Schritten frühestens ein Ende erreicht werden kann. Es kommt am Ende die Farbe heraus, die nicht zu der Differenz gehört.

Ausgehend von der Bedingung aus Aufgabe e) wird eine Fallunterscheidung vorgenommen.

Fall 1: Eine Differenz ist Null.

Es sei $a = b$ und somit $a - b = 0$. Treffen sich nun nur blaue und rote Roboter, so bleibt

$a^* - b^* = 0$. Es ist nach mindestens a Schritten beendet und nur grüne Roboter sind vorhanden.

Fall 2: Eine Differenz ist ein Vielfaches von 3.

Es sei $a > b$ und $a - b = 3n$, für eine natürliche Zahl n. Begegnen sich nun ein blauer und ein grüner Roboter, so ist $a^* = a - 1$, $b^* = b + 2$ und $c^* = c - 1$. Weiterhin folgt

$a^* - b^* = 3n - 3$, also sinkt die Differenz der blauen und roten Roboter um drei. Dies lässt sich noch $(c - 1)$ Mal wiederholen und man erhält:

(1) $a^* - b^* = 3n - 3c$

Fall a: $n=c$.

In diesem Fall sind wir bei Fall 1 und benötigen noch $(a - n)$ Schritte. Das Ende ist also nach mindestens $(a - n) + c = a$ Schritten erreicht.

Fall b: $n<c$

In diesem Fall wird bereits nach weniger als c Schritten der Zustand $a^* - b^* = 0$ erreicht. Dann sind wir bei Fall 1 und benötigen noch $(a - n)$ Schritte. Das Ende ist also nach mindestens $(a - n) + c = a$ Schritten erreicht.

Fall c: n>c

Es gilt weiterhin, dass a* > b* ist, denn sonst wäre bereits a* – b* = 0 eingetreten. Nun müssen sich ein blauer und ein roter Roboter begegnen. Dann werden a* und b* jeweils um 1 reduziert und es ist c* = 2. Nun können sich wieder zweimal ein blauer und ein grüner Roboter begegnen. Bei jedem Mal sinkt die Differenz a* – b* um 3. Wiederhole diese Schritte so lange, bis der Zustand a* – b* = 0 erreicht ist. Es werden dann noch so viele Schritte benötigt, wie a* noch groß ist.

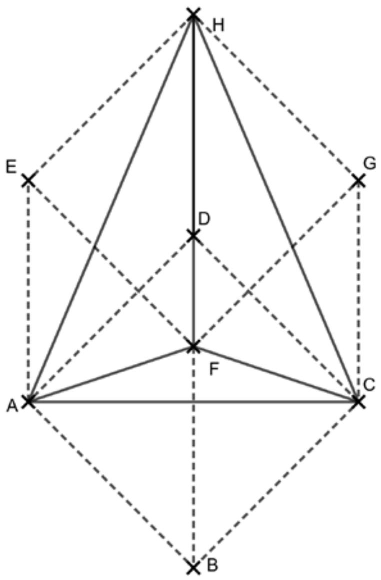
Das Ende ist also ebenfalls nach mindestens a Schritten erreicht.

Aus dem obigen Beweis lässt sich leicht ableiten, dass wenn alle Differenzen a – b, a – c, b – c Null oder ein Vielfaches von 3 sind, die Variable mit dem höchsten Wert die Anzahl der mindestens benötigten Begegnungen und die Variable mit dem geringsten Wert die Endfarbe vorgibt. Trifft diese Eigenschaft auf mehrere Variable zu, so kommen mehrere Farben als Endfarbe in Frage.

AUFGABE 2 (Startup)

Man legt eine Ecke des ersten Tetraeders in eine Ecke des Würfels und positioniert die Kanten des Tetraeders anschließend so, dass sie auf den Diagonalen der Würfelseiten liegen, die sich in der anfangs erwähnten Ecke des Würfels berühren. Der zweite Tetraeder kann dann so in den Würfel eingefügt werden, dass eine seiner Flächen auf der Fläche des ersten Tetraeders liegt, die der zuerst genannten Ecke gegenüber liegt. Beide Tetraeder passen in den Würfel hinein.

Beweis:



Wir bezeichnen die Eckpunkte des Würfels mit A, B, C, D, E, F, G und H.

Wenn wir A mit H, F und C sowie F mit C und H und C mit H verbinden, so ergibt sich ein Tetraeder, der vollständig innerhalb des Würfels liegt. Seine Kantenlänge entspricht aber nicht der Kantenlänge des Würfels. Da seine Kantenlängen den Diagonalen des Würfels entsprechen, beträgt ihre Länge Wurzel aus 2 mal die Kantenlänge des Würfels.

Um unseren Tetraeder auf die richtige Größe zu reduzieren führen wir eine zentrische Streckung mit Streckzentrum A und Streckfaktor 1 durch Wurzel aus 2 durch. Das Ergebnis sind Punkte F', C' und H', deren Entfernung von A stets der Kantenlänge des Würfels entspricht. Die Punkte F', C' und H' liegen alle innerhalb des Würfels, damit auch das Dreieck F'C'H'. Jetzt hat unser Tetraeder die richtige Größe.

Der Schwerpunkt S des Dreiecks FCH liegt auf der räumlichen Diagonalen AG. Außerdem ist die auf AG liegende Verbindung von S zu A die räumliche Höhe des Tetraeders. Durch die zentrische Streckung geht der Schwerpunkt S über auf einen Punkt S', der wiederum der Schwerpunkt des Dreiecks F'C'H' ist. Wieder liegt S' auf der räumlichen Diagonalen AG. Und die Verbindung von S' nach A liegt einerseits auf AG und ist andererseits die räumliche Höhe des verkleinerten Tetraeders.

Jetzt spiegeln wir den Punkt A an der Ebene, die durch die Punkte F', C' und H' verläuft. Dadurch entsteht ein zweiter gleich großer Tetraeder mit den Eckpunkten A', F', C' und H'. Da die räumliche Diagonale AG diese Ebene senkrecht schneidet, muss der Bildpunkt A' wieder auf AG liegen. Die Verbindung zwischen S' und A ist die räumliche Höhe des ersten Tetraeders. Diese Verbindung nimmt aber weniger als die Hälfte der Entfernung von A nach G ein.

Für die räumliche Höhe des allerersten Tetraeders gilt nämlich vor der Verkleinerung, dass seine räumliche Höhe gleich Wurzel aus 6 durch 3 mal Kantenlänge des Tetraeders war, bzw. etwa 0,816 mal Kantenlänge des Tetraeders. Da die Kantenlänge von Würfel und Tetraeder gleich waren, entspricht diese Angabe etwa 0,816 mal Kantenlänge des Würfels. Die Länge der Diagonalen AG entspricht aber Wurzel aus 3 mal Kantenlänge des Würfels. Dies entspricht etwa 1,732 mal Kantenlänge des Würfels. Die räumliche Höhe des Tetraeders ist also weniger als die Hälfte der Länge der räumlichen Diagonalen.

Damit müssen alle Eckpunkte des neuen Tetraeders im Würfel liegen. Und der Tetraeder liegt insgesamt im Würfel. Da er mit dem ersten verkleinerten Tetraeder nur die Fläche F'C'H' gemeinsam hat, gibt es keine Schnittmenge der beiden Tetraeder.

AUFGABE 3 (Teilbarkeit)

Im ersten Schritt klammern wir den Faktor $\frac{n}{120}$ aus :

$$f(n) = \frac{n}{120} \cdot (4 - 5 \cdot n^2 + n^4) \quad (1)$$

Nun bestimmen wir die Nullstellen des Polynoms p(n) mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms

$$p(n) = 4 - 5 \cdot n^2 + n^4 \quad (2)$$

und erhalten:

$$p(n) = 0 \Leftrightarrow n_1 = -2, n_2 = -1, n_3 = 1, n_4 = 2 \quad (3)$$

Damit können wir die Funktion f(n) als fortlaufendes Produkt Schreiben:

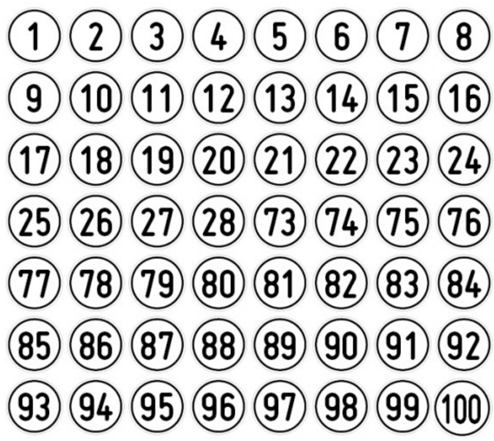
$$f(n) = \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{120} \quad (4)$$

Für $n = 0, n = 1$ und $n = 2$ ist die Funktion offensichtlich Null.

Wir setzen nun $n := n + 2$. Die Zahl 120 entspricht genau 5!, also ist:

$$f(n) = \frac{(n)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5!} \quad (5)$$

Im Zähler stehen also fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen ≥ 3. Wie man am Zahlenraster für die Zahlen 1 bis 100 leicht sehen kann, sind bei fünf aufeinander folgenden Zahlen immer mindestens eine Zahl aus der 2er, 3er, 4er und 5er Reihe dabei.



AUFGABE 4 (Wilde Würfelei)

Hier sind individuelle, kreative und und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht. Gute Lösungen werden im nächsten Schuljahr von uns veröffentlicht.

Ein Beispiel:

Kevin legt 10 Standardwürfel aufeinander. Auf dem obersten Würfel ist von oben eine 4 zu sehen. Wie hoch ist die Summe der Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind.

Welche Summe ergibt sich, wenn 21 Würfel aufeinander gestapelt werden und oben eine 1 liegt?

Wie lässt sich allgemein die Augensumme der nicht sichtbaren Flächen der Würfelsäule bilden, wenn die oberste Fläche eine Zahl zwischen 1 und 6 zeigt und die Säule aus n Würfeln bestehen?

Mit der Lösung:

9 Würfel haben 2 gegenüberliegende verdeckte Flächen und gegenüber der oben liegenden 4 ist eine 3 nicht sichtbar: 9 *7 + 3 = 66, d. h. die Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind, ist 66.

Entsprechend: 20 * 7 + 6 = 146, d. h. die Augenzahlen der Würfel der Flächen, die nicht sichtbar sind, ist 146.

Allgemein gilt: n: Anzahl der Würfel,

x: oben sichtbare Zahl: Damit ergibt sich (n-1) *7 + 7-x.